

基于满二叉树的 RA 码交织器设计*

张红泰,刘宏立,刘述钢

(湖南大学电气与信息工程学院,湖南 长沙 410082)

摘要:为提高输入信息较长时重复累积码的编码效率,对重复累积码的交织器进行优化改进。按照满二叉树子节点的奇偶排列方式对交织器的输入序列依次分组,并利用叶子节点对分组信息重新组合获得输出序列,与 S 随机交织器相比,大大降低输入信息之间的相关性,避免了 RA 码校验矩阵中 I、II 类 4 环的产生,保证了译码的准确性。仿真结果表明,在输入信息序列较长时,改进的交织器编码速度快且误码率远低于行列规则交织器;与 S 随机交织器相比,改进的交织器可以显著提高编码速率,且在误码率同为 1×10^{-4} 时约有 0.3 dB 的增益。

关键词:满二叉树;交织器;重复累积码;校验矩阵;S 随机交织器

中图分类号:TN911

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.1007-130X.2015.04.012

Interleaver design for RA codes based on full binary tree

ZHANG Hong-tai, LIU Hong-li, LIU Shu-gang

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: In order to improve the encoding efficiency of repeat accumulate codes under the circumstance of long input information, we present an optimized interleaver design for repeat accumulate codes. The input information sequence of interleaver is regrouped by the child nodes of full binary tree according to its parity arrangement, and the output sequence is obtained by using the leaf nodes to recombine the grouped sequence. Therefore, the relativity among input information is greatly reduced compared with S-random interleaver, and it prevents the class-I and class-II four circles of check matrix from being produced in the encoding process while the decoding accuracy is guaranteed. Simulation results show that the optimized interleaver is faster and its BER is far less than regular interleavers under long input information; and the optimized interleaver is much faster and has a better performance (about 0.3 dB) than S-random interleavers at the same BER of 1×10^{-4} .

Key words: full binary tree; interleaver; repeat accumulate code; check matrix; S-random interleaver

1 引言

重复累积码 RA (Repeat Accumulate code) 是一种类 Turbo 码,同时也是一种特殊的类低密度奇偶校验码 LDPC (Low Density Parity Check Code) 码,在使用置信传播 BP (Belief Propagation) 译码算法进行译码时译码复杂度低且具有接近香

农限的优越性能^[1]。因此,RA 码得到了许多国内外学者的关注,基于不规则 RA 码改进的 LDPC 码已成为欧洲第二代数字卫星广播标准 DVB-S. 2 的重要组成部分^[2,3]。研究证明,RA 码的置信传播译码算法在无环图上才是最优的^[4],如果与交织器结构对应的校验矩阵中存在短环特别是 4 环,将会严重影响 BP 译码算法的准确性,因此编码过程中交织器的设计尤为重要。文献[1]通过结合 RA 码

* 收稿日期:2014-03-05;修回日期:2014-04-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61172089);湖南省科技厅资助项目(2012FJ4119)
通信地址:410082 湖南省长沙市湖南大学电气与信息工程学院
Address: College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, P. R. China

中的交织器和累加器结构来构造复合交织器,使得改进后的 RA 码具有更低的错误平台;文献[5]通过利用 PEG 算法构造的无 4 环校验矩阵来重新设计 RA 码交织器,仿真表明其对较高码率的 RA 码性能改善明显;文献[6]提出一种基于三次 Hamiltonian 图的 RA 码交织器设计方法,并利用 Hamiltonian 图的对数周长关系给出了 RA 码交织器的详细设计。在计算机科学中满二叉树^[7~9]是一种重要的非线性数据结构,其性质和特点在计算机领域得到了深入研究,本文基于满二叉树优化改进 RA 码交织器设计,提高 RA 码的编码效率,为 RA 码交织器的设计提供了一种新方案。

2 RA 码与交织器

RA 码的编码器结构(如图 1 所示)由码率为 $1/p$ 的重复码和传递函数为 $1/(1+D)$ 的卷积码以及连接二者的交织器组成^[10];如果组合器的参数 a 不为 1 时,交织器的输出还需经过组合器变换后再连接到累加器上,组合器可以改变 RA 码的码率。

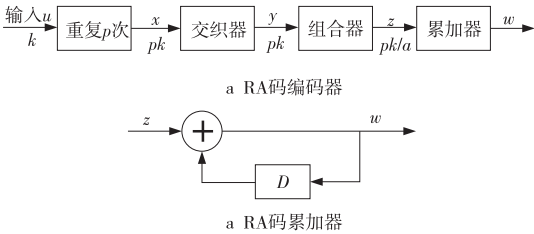


Figure 1 Structure of RA encoder

图 1 RA 码编码器

根据 RA 码的定义,RA 码编码过程^[11]有以下四步:

步骤 1 源信息输入和重复:设输入信息为 $u=[u_1,u_2,\cdots,u_k]$, u 按位重复 p 次后获得 x :

$$x=[x_1,x_2,\cdots,x_{pk}]=[\underbrace{u_1,u_1,\cdots,u_1}_p,\cdots,\underbrace{u_k,u_k,\cdots,u_k}_p] \tag{1}$$

x 与 u 的下标变换关系为: $x_i=u_j, j=\lceil i/p \rceil$, 其中 $\lceil c \rceil$ 表示大于或等于 c 的最小整数。

步骤 2 信息交织:设交织器的交织方法为 $\Pi=[\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{pk}]$, 经交织后的信息如式(2)所示:

$$y=[y_1,y_2,\cdots,y_{pk}]=[x_{\pi_1},x_{\pi_2},\cdots,x_{\pi_{pk}}] \tag{2}$$

步骤 3 信息组合:交织后的输出信息按 a 个元素为一组进行分组,然后以组为单位进行组合运算,组合器的组合方法为:

$$z_i=y_{(i-1)a+1}\oplus y_{(i-1)a+2}\oplus\cdots\oplus y_{ia} \tag{3}$$

其中, $i=1,2,\cdots,l, \oplus$ 表示模 2 加运算, $l=pk/a$ 。

步骤 4 信息累加:信息经累加器后的输入输出关系如式(4)所示:

$$w_i=\begin{cases} z_1, & i=1 \\ z_i\oplus w_{i-1}, & i=2,3,\cdots,l \end{cases} \tag{4}$$

最终经过编码后输出码字 C 为: $C=[u_1,u_2,\cdots,u_k,w_1,w_2,\cdots,w_l]$, 其中码长为: $N=k+\frac{pk}{a}$, 码率为: $\frac{a}{a+p}$ 。

根据不同的设计思想,交织器主要分为规则交织器、不规则交织器和随机交织器三种^[12]。规则交织器又称行列交织器(如图 2 所示),它是由 $M\times N$ 维矩阵表示的按行或列写入、读出、周期为 $T=M\times N$ 的交织器,这种交织器易于实现,但在某些情况下无法置乱输入信息,致使其性能较差。不规则交织器主要有螺旋交织器、对角交织器和奇偶交织器,它们也是利用矩阵进行交织,但读取和写入的方式不同,不规则交织器性能较规则交织器稍好。随机交织器主要是指 S 随机交织器, S 随机交织器可以保证在交织后原输入相邻信息位的间距至少为 S ^[13], 然而随着交织长度的增加,生成满足要求的随机数需要消耗大量的时间,编码效率不高。为在较长输入信息序列的情况下能快速高效地生成交织序列,本文提出一种改进的基于满二叉树的交织器设计方法。

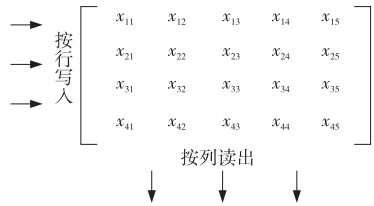


Figure 2 Regular interleaver

图 2 规则交织器

3 RA 码交织器设计原则

RA 码的译码过程采用的是基于 Tanner 图的置信传播译码算法, Tanner 图与校验矩阵是一一对应的, 而由编码器结构确定的校验矩阵中如果存在短环会导致信息经过短环后又回到原节点, 将严重影响 BP 译码算法的准确性^[14]。RA 码的校验矩阵 $H=[H_1,H_2]$, 其中 H_1 的结构是由重复器、交织器以及组合器的参数共同决定的: 在重复次数为 q 、组合器参数为 a 时, H_1 是列重为 q 、行重为 a 的 $\frac{pk}{a}\times k$ 维稀疏矩阵; H_2 的结构是与式(4)确定

的累加器相对应的 $\frac{pk}{a} \times \frac{pk}{a}$ 维稀疏矩阵。

在设计 RA 码交织器时主要考虑 4 环对译码性能的影响^[8]。RA 码的 4 环在校验矩阵中是指某两行和两列同时存在“1”,连接这 4 个“1”的边构成的矩形就称作 4 环,在 Tanner 图中是指信息从某个变量节点出发经过不同的 4 条边后再回到原节点的环路。对于 RA 码来讲有以下两类 4 环(如图 3 所示):

(1)I 类 4 环:矩阵 H_1 中某一列存在“11”,且在矩阵 H_2 对应的相同行列位置也存在“11”构成 4 环。

(2)II 类 4 环:在 H_1 矩阵中存在两行两列相同位置的“1”构成 4 环。

$$H = [H_1, H_2] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Figure 3 Graph of four circles of RA code

图 3 RA 码的 4 环示意图

由于累加器的对角线结构决定 H_2 各列无法单独形成 4 环,因此上述 I 类和 II 类 4 环是 RA 码中 4 环的所有情况,只要避免 RA 码校验矩阵中的这两种情况就能避免 4 环的产生,从而保证译码的准确性。

4 RA 码交织器的改进

由于行列规则交织器编码速度快但性能较差,而 S 随机交织器在码长较长时交织过程耗时较长,因此本文设计了一种在输入信息码长较长的情况下既能快速生成交织序列又能保证性能的改进交织器,详细的设计步骤以及流程图(如图 4 所示)如下:

步骤 1 输入待交织的信息序列 u ,并将其置于数组 n_1 中;

步骤 2 对 n_1 中位于奇数位的信息取出并置于数组 n_2 中,偶数位的信息置于数组 n_3 中;

步骤 3 按照满二叉树(如图 5 所示)的方法,对数组 n_2 和 n_3 按照步骤 2 获得数组 n_4, n_5 和 n_6, n_7 ;

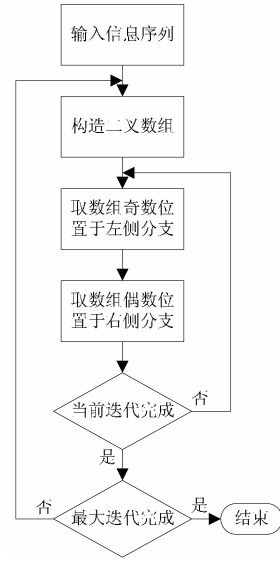


Figure 4 Implementation procedure of interleaver

图 4 交织器实现过程

步骤 4 按照步骤 3 中的方法循环迭代 m 次,最终获得数组 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{m+1} - 1$;

步骤 5 将步骤 4 获得的二叉树中位于叶子节点的数组 $n_{2^m}, n_{2^m+1}, \dots, n_{2^{m+1}-1}$ 组合在一起获得交织后的序列 y 。

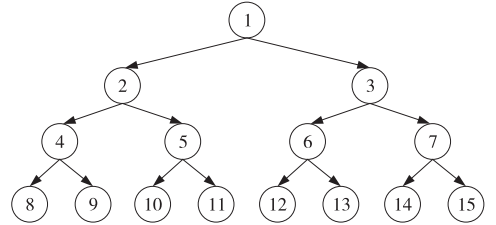


Figure 5 Full binary tree

图 5 满二叉树

假设数据长度 $N=43$,原数组:

$y_1 = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 30 \ 31 \ 32 \ 33 \ 34 \ 35 \ 36 \ 37 \ 38 \ 39 \ 40 \ 41 \ 42 \ 43]$

按照改进交织器的思想,经过 4 次迭代交织后数组变为:

$y_2 = [1 \ 17 \ 33 \ 9 \ 25 \ 41 \ 5 \ 21 \ 37 \ 13 \ 29 \ 3 \ 19 \ 35 \ 11 \ 27 \ 43 \ 7 \ 23 \ 39 \ 15 \ 31 \ 2 \ 18 \ 34 \ 10 \ 26 \ 42 \ 6 \ 22 \ 38 \ 14 \ 30 \ 4 \ 20 \ 36 \ 12 \ 28 \ 8 \ 24 \ 40 \ 16 \ 32]$

对比数组 y_1 和 y_2 可知,在选取合适的迭代次数 m ,并经过 m 次分叉交织后,根据满二叉树深度为 t 的叶子节点个数 e 与二叉树深度 t 的关系:

$$t = [\log_2 e] + 1 \quad (5)$$

可知:

$$e = 2^{t-1} \quad (6)$$

根据满二叉树总节点个数与深度关系式：

$$e' = 2^t - 1 \tag{7}$$

在数据长度为 N ，且二叉树叶子节点中最多存在两个元素时，结合式(6)与式(7)，可得原数组相邻元素之间最小距离：

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{e'} \cdot N \approx \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor \tag{8}$$

式(8)中， $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。

在使用行列交织器时，由于输入数据长度的不同，原相邻元素间最小距离的 $S \leq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ ；当使用 S 随机交织后，原数组相邻元素间的最小距离 $S = \lfloor \sqrt{N/2} \rfloor$ ；而按文献[1]中的复合交织器设计方法，在迭代次数为 m 时，最小距离 S 在 $m/2$ 分别取奇、偶数的数值为 $((m-2)/4)p+1$ 和 $((m-4)/4)p+2$ ，其中 p 为 RA 码的重复次数；而基于 Hamiltonian 图构造的交织器交织后的最小距离 $S > \epsilon N$ 且其概率至少为 $1 - \delta$ [6]，其中 $\epsilon < \min \left\{ \frac{c}{4^3 e^2 l^2}, \frac{\delta d}{16} \right\}$ ，各参数含义请参阅文献[6]。

对比上述几种交织方式，改进的分叉交织器交织后的最小距离 $S \approx \lfloor N/4 \rfloor$ 均大于其他交织方式。

对于 I 类 4 环，由于改进交织器在交织过程中原信息相邻元素间的距离至少增至 $\lfloor N/4 \rfloor$ ，且 N 取值较大 ($N > 8$) 时有 $S \approx \lfloor N/4 \rfloor > \lfloor \sqrt{N/2} \rfloor$ ，与 S 随机交织器同理避免了 I 类 4 环的产生；对于 II 类 4 环，组合器参数 a 为 1 即码率固定时，矩阵 H_1 为有卷回的斜对角矩阵且行重为 1，不存在构成 II 类 4 环的条件。因此，按照改进的交织器构造的 RA 码不会形成 4 环，保证了置信传播译码算法的准确性。

5 性能及仿真

本文对不同码长和交织方式的 RA 码分别进行仿真，仿真的参数如表 1 所示。

Table 1 Simulation parameters for Matlab
表 1 Matlab 仿真参数

仿真参数	数值
输入信源信息	伪随机序列
RA 码重复次数	3
码长	$N=1\ 024, N=4\ 096$
码率	1/3
调制方式	BPSK
信道模型	AWGN
BP 译码算法迭代次数	20

为方便观察，这里设置输入信息位数为 100，利用 Matlab 生成随机序列，绘制的输入信息序列波形图如图 6 所示。

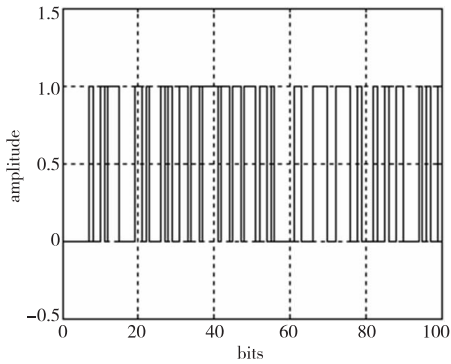


Figure 6 Input information waveform

图 6 输入信息波形图

按照表 1 中仿真参数设置，获得的仿真结果如图 7 和图 8 所示。

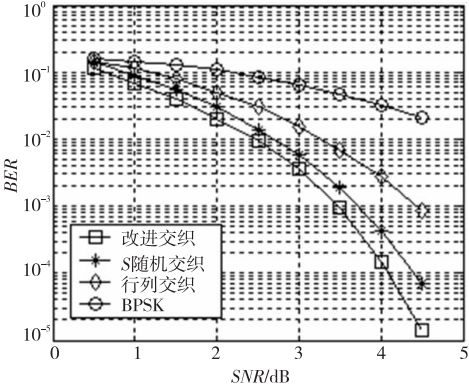


Figure 7 Simulation curves($N=1\ 024$)

图 7 仿真曲线， $N=1\ 024$

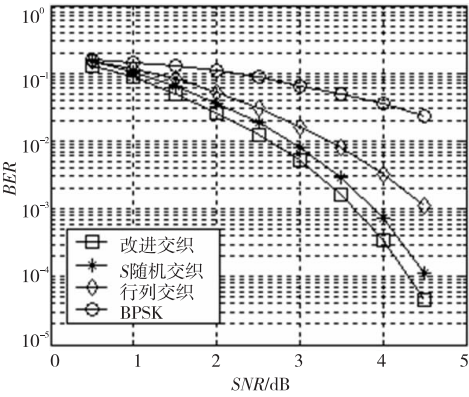


Figure 8 Simulation curves($N=4\ 096$)

图 8 仿真曲线， $N=4\ 096$

观察图像，在误码率相同的条件下，对比不同交织方式所需的信噪比可知，改进的交织方式性能优于 S 随机交织方式， S 随机交织方式优于行列交织方式，而未采用交织技术的 BPSK 调制的性能最差；对比图 7 和图 8，在码长 $N=1\ 024$ 、误码率为

1×10^{-4} 时,改进交织器所需的信噪比相对 S 随机交织器少 0.35 dB 左右,而在码长 $N=4\ 096$ 、误码率为 10^{-4} 时,改进交织器所需的信噪比相对 S 随机交织器少 0.2 dB 左右。在输入信息码长较大时,由于行列交织方式会产生大量的 4 环,严重影响 BP 译码算法的准确性,因此行列交织方式的性能较改进的交织方式以及 S 随机交织方式略差。

6 结束语

本文针对 RA 码的置信传播译码算法提出一种改进的交织器设计方法,基于二叉树子节点的奇偶排列方式对输入信息序列依次分组,最大化地置乱原输入信息并打破输入信息之间的相关性,同时避免校验矩阵中 I、II 类 4 环的产生,保证了 BP 译码算法的准确性。仿真表明,在输入信息较长时改进交织器编码速度快且性能远优于行列交织器,且在误码率同为 1×10^{-4} 情况下改进交织器约有 0.3 dB 的增益,为 RA 码交织器的设计提供了一种新方案。

参考文献:

- [1] Johnson S J, Weller S R. Combinatorial interleavers for systematic regular repeat-accumulate codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2008, 56(8):1201-1206.
- [2] Papaharalabos S, Papaleo M, Mathiopoulos P T, et al. DVB-S2 LDPC decoding using robust check node update approximations[J]. IEEE Transactions on Broadcasting, 2008, 54(1):120-126.
- [3] Park C S, Kim S, Hwang S Y. Design of a low-area, high-throughput LDPC decoder using shared memory banks for DVB-S2[J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2009, 55(2):850-854.
- [4] Shi Zhi-ping, Zhang Zhong-pei, Zhu Nan. Design of double repeat accumulate codes based on belief propagation decoding[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30(7):1644-1647. (in Chinese)
- [5] Wen Wu, Xiao Er-jing, Zhu Lian-xiang. Interleaver design for q -ary regular RA codes based on improved PEG algorithm[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edition), 2010, 22(2):196-199. (in Chinese)
- [6] Guruswami V, Machmouchi W. Explicit interleavers for a repeat accumulate accumulate (RAA) code construction[J]. Information Theory, 2008, 6(11):1968-1972.
- [7] Liu Yong-xia, Zhang Zhao-hui, Zhang Yan-min. Image denoising based on K -means clustering and binary tree decision[J]. Computer Engineering & Science, 2013, 35(5):118-123. (in Chinese)
- [8] Beak S, Hieu B V, Lee H, et al. Novel binary tree Huffman

decoding algorithm and field programmable gate array implementation for terrestrial-digital multimedia broadcasting mobile handheld[J]. IET Science, Measurement & Technology, 2012, 6(6):527-532.

- [9] Xu X, Liu C, Yang S X, et al. Hierarchical approximate policy iteration with binary-tree state space decomposition[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(12):1863-1877.
- [10] Johnson S, Lechner G. Spatially coupled repeat-accumulate codes[J]. IEEE Communications Letters, 2013, 2(17):373-376.
- [11] Han W K, Le Goff S Y, Sharif B S. Repeat accumulate codes for bit-interleaved coded modulation with iterative demapping[C]//Proc of IEEE International Conference on Signal Processing and Communications, 2007:1543-1546.
- [12] Gazi O, Yilmaz A. Collision free row column S -random interleaver[J]. IEEE Communications Letters, 2009, 13(4):257-259.
- [13] Koutsouvelis K V, Dimakis C E. A low complexity algorithm for generating turbo code S -random interleavers[J]. Wireless Personal Communications, 2008, 46(3):365-370.
- [14] Johnson S J, Weller S R. Practical interleavers for repeat-accumulate codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(5):1225-1228.

附中文参考文献:

- [4] 史治平, 张忠培, 朱南. 基于置信传播译码的 DRA 码设计[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(7):1644-1647.
- [5] 文武, 肖而靖, 朱联祥. 基于改进 PEG 算法的多元 RA 码交织器设计[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2010, 22(2):196-199.
- [7] 刘永霞, 张朝晖, 张艳敏. 基于(K0-均值聚类及二叉树决策的图像去噪[J]. 计算机工程与科学, 2013, 35(5):118-123.

作者简介:



张红泰(1989-),男,山东寿光人,硕士生,研究方向为电力线载波通信和信道编解码算法。E-mail: 1423308044@qq.com

ZHANG Hong-tai, born in 1989, MS candidate, his research interests include power line communication, and channel code.



刘宏立(1963-),男,湖南常德人,教授,博士生导师,研究方向为现代通信理论、无线传感器网络新技术和 OFDM 通信系统。E-mail:1229465197@qq.com

LIU Hong-li, born in 1963, professor, PhD supervisor, his research interests include modern communication theory, WSN new technology, and OFDM communication system.