

面向量子博弈论的光量子芯片设计及实验*

曾 茹, 詹俊伟, 薛诗川, 王易之, 王冬阳, 刘英文, 吴俊杰

(国防科技大学计算机学院量子信息研究所兼高性能计算国家重点实验室, 湖南 长沙 410073)

摘 要:量子博弈论是量子信息和经典博弈论的交叉研究方向。理论研究表明,量子博弈模型不仅能够突破经典博弈模型的收益上限,更是有望用于深入理解和突破量子通信、量子计算等领域的很多基础问题。针对一种利益冲突的贝叶斯量子博弈模型,提出了一种可编程的光量子芯片结构,首次运用硅基光量子芯片实验完成了量子博弈实验。通过动态生成和调控片上量子纠缠态,实验证实了量子博弈相对经典博弈的博弈优势,展示了光量子芯片在量子博弈论研究中的重要作用,为量子信息领域更复杂问题的研究提供了重要的实验手段。

关键词:量子博弈;光量子芯片;量子纠缠;量子计算;纳什均衡

中图分类号:TP38;TN40

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.1007-130X.2023.03.003

Design and experiment of photonic quantum chip for quantum game theory

ZENG Ru, ZHAN Jun-wei, XUE Shi-chuan, WANG Yi-zhi, WANG Dong-yang, LIU Ying-wen, WU Jun-jie

(Institute for Quantum Information & State Key Laboratory of High Performance Computing,

College of Computer Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Quantum game theory is an interdisciplinary area combining quantum information and game theory. Theoretical studies demonstrate that quantum games surpass the maximal interest of classical ones, which can be applied to analyze and solve fundamental problems in various fields, such as quantum communication and quantum computing. Aiming at a Bayesian quantum game model with conflictive interests, this paper proposes a programmable photonic quantum chip structure, and completes the quantum game experiment with silicon based optical quantum chip for the first time. By dynamically generating and modulating entangled states on the chip, the experiment demonstrates the advantage of the quantum game over the classical one. This paper shows that photonic quantum chips play a vital role in the research of quantum game theory and provide a promising methodology to study more complicated problems in the field of quantum information.

Key words: quantum game; photonic quantum chip; quantum entanglement; quantum computing; Nash equilibrium

1 引言

博弈论是应用数学领域的重要分支,在经济

学、社会学和国际战略等众多领域发挥了重要而深远的作用^[1]。非合作博弈是常见的博弈模型,研究在相互影响的局面中如何通过交流与合作获得个人利益的最大化^[2]。当任何博弈一方都会因修

* 收稿日期:2022-03-01;修回日期:2022-04-11

基金项目:国家自然科学基金(62061136011,61632021)

通信作者:吴俊杰(junjiewu@nudt.edu.cn)

通信地址:410073 湖南省长沙市国防科技大学计算机学院量子信息研究所兼高性能计算国家重点实验室

Address: Institute for Quantum Information & State Key Laboratory of High Performance Computing, College of Computer Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, Hunan, P. R. China

改博弈策略导致个人收益降低时,博弈模型达到平衡局面,博弈参与者当前的策略组合被称为纳什均衡^[3]。

博弈双方之间,或者博弈方与裁判方之间通过传递与处理信息完成博弈过程。当把这种信息拓展成量子信息时,就自然产生出量子博弈模型^[4]。不同于经典博弈论,量子博弈论中双方的策略空间被扩展为线性希尔伯特空间,量子力学的纠缠特性也被引入了量子博弈过程^[5,6]。已有的理论研究表明,量子博弈论能够打破传统博弈的均衡上限,即量子博弈玩家有可能在新的纳什均衡点上获得更大收益^[7]。与此同时,研究人员发现,量子博弈模型可以被用于研究大量的量子信息问题,比如:量子密码^[8-10]、量子模拟^[11]和量子算法^[12,13]等。

凭借量子物理实验技术的不断进步,量子博弈模型的实验验证已成为量子博弈论研究的重要内容。目前分别在核磁共振量子计算机^[14]、基于离子阱的量子计算机^[15]、腔量子电动力学^[16,17]和线性光学量子方案^[18-21]上展开了博弈量子化的演示研究。例如,已经在核磁共振计算机和线性光学量子方案中实现了2人囚徒困境的量子版本^[22,23];在基于离子阱的量子计算机上演示了贝叶斯博弈^[24]。

光量子芯片是量子信息的重要实验技术。得益于高集成、高精度等优势,光量子芯片技术已经被广泛应用于量子计算、量子通信和量子精密测量等各个领域^[25-27]。本文研究面向量子博弈论的光量子芯片及物理实验,据我们所知,这是首次运用光量子芯片实验研究量子博弈论。本文的具体工作包括:

(1)提出了一种面向量子博弈论的光量子芯片结构。该结构包含片上纠缠光子源,以及博弈双方的策略选择光学网络,支持量子博弈模型从经典情形到量子情形的连续过渡。

(2)基于光量子芯片实验实现了一种贝叶斯量子博弈模型,实验观察到量子博弈打破了传统博弈的均衡上限。

2 一种利益冲突的贝叶斯博弈模型

选取 Pappa 等人^[28]设计的一个利益冲突的两人贝叶斯博弈模型作为本文研究的博弈模型。在贝叶斯博弈中,参与博弈的各方在做出决策时并不完全了解其他博弈参与者的行为,但决策过程可能使用共同的建议(advice),例如来自被博弈各方所

信任的顾问的建议^[29],建议会对博弈各方的策略(strategy)产生影响。一个博弈模型往往有多个均衡点,如果博弈模型对于参与博弈的各方是利益冲突的,那么各方选取的策略组合会有不同的均衡点倾向^[30]。

具体博弈过程如图1所示,参与博弈的玩家 Alice 和 Bob 会分别收到一个输入 x_A 和 x_B , 其值为 0 或者 1, 满足均匀分布, 概率均为 0.5。双方通过接受博弈顾问的建议从而考虑相关策略, 进而决定输出 y_A 和 y_B , 其值同样为 0 或者 1。 $u_\delta: x_A \times x_B \times y_A \times y_B \rightarrow \mathbf{R}, \delta \in (A, B)$, 是该博弈模型的收益(payload)函数, 其中 δ 表示玩家类型, 分别为 A (Alice) 和 B (Bob); u_A 和 u_B 构成本次博弈的收益表, 将每个玩家的输出和输入映射到一个实数值, 表示玩家在本轮博弈的收益情况。在博弈过程中, 博弈各方并不掌握对方的输入、输出及收益表信息。

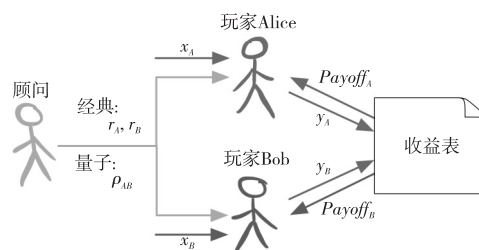


Figure 1 A Bayesian game model

图1 一种贝叶斯博弈模型

博弈收益情况的具体规则为:

(1)当玩家获取到的输入和给出的输出关系满足 $x_A \wedge x_B = y_A \oplus y_B$, 双方均可以获得收益, 否则双方均不获得收益。

(2)在双方都获得收益的情况下, 若 $x_A \wedge x_B = 1$, 双方收益相同。

(3)在双方都获得收益的情况下, 若 $x_A \wedge x_B = 0$, 输出为 1 一方的收益高于另外一方的, 输出为 0 时情况恰恰相反。

根据制定的博弈收益规则, 通过收益函数 u_A 和 u_B 得到的双方收益(Alice, Bob)如表1所示。

Table 1 Payoff table of both parties

表1 双方收益表

	$x_A \wedge x_B = 0$		$x_A \wedge x_B = 1$	
	$y_B = 0$	$y_B = 1$	$y_B = 0$	$y_B = 1$
$y_A = 0$	(1, 1/2)	(0, 0)	(0, 0)	(3/4, 3/4)
$y_A = 1$	(0, 0)	(1/2, 1)	(3/4, 3/4)	(0, 0)

Alice 和 Bob 可以通过经典博弈模型或者量子博弈模型进行博弈。在经典博弈模型下, Alice 和 Bob 分别接收到经典建议 r_A 和 r_B 。双方根据建议执行经典策略 C_A 和 C_B , 分别得到如式(1)和

式(2)所示的输出:

$$y_A = C_A(x_A, r_A) \quad (1)$$

$$y_B = C_B(x_B, r_B) \quad (2)$$

经典博弈模型下,双方可以根据输入和输出对照收益表得到收益情况。已知可采取的经典策略下双方一共有3个均衡点^[28],收益和均为9/8。

(1) Alice 收益 11/16, Bob 收益 7/16。此时可采取的经典策略为: Alice 始终输出 0; 当 Bob 输入为 0 时输出 0, 输入为 1 时输出 1。

(2) Alice 收益 7/16, Bob 收益 11/16。此时可采取的经典策略为: 当 Alice 输入为 0 时输出 1, 输入为 1 时输出 0; Bob 则始终输出 1。

(3) Alice 收益 9/16, Bob 收益 9/16。此时可采取的策略为: Alice 输入为 0 时输出 1, 输入为 1 时输出 0; Bob 输入为 0 时输出 0, 输入为 1 时输出 1。

同时经典博弈模型下的收益满足式(3):

$$Payoff_A + Payoff_B \leq 9/8 \quad (3)$$

在量子博弈模型中,博弈过程在双量子比特系统中进行。Alice 和 Bob 根据收到的量子建议设置初态 ρ_{AB} 和投影测量算子。其中投影测量算子即为双方的量子策略 Q_{AB} 。双方各自拥有一个量子比特,根据量子策略 Q_{AB} 对拥有的量子比特施加操作,变换测量基,最终通过投影测量得到测量结果。通过设置的测量结果与博弈输出值的对应关系得到本次博弈的博弈输出,如式(4)所示:

$$(y_A, y_B) = Q_{AB}(x_A, x_B, \rho_{AB}) \quad (4)$$

双方的输出满足如式(5)所示的概率关系:

$$(y_A, y_B) \sim P(y_A, y_B \mid x_A, x_B, \rho_{AB}) = \text{Tr}([A_{x_A}^{y_A} \otimes B_{x_B}^{y_B}] \cdot \rho_{AB}) \quad (5)$$

其中, $A_{x_A}^{y_A}$ 和 $B_{x_B}^{y_B}$ 分别表示 Alice 和 Bob 用于各自所持有的量子比特的测量算子。

本文量子化后的博弈过程中,玩家从博弈顾问接收如下形式的测量算子建议并作为量子策略。以 Alice 的操作为例:

当 $y_A = 0$ 时,采取的测量算子如式(6)所示:

$$A_{x_A}^{y_A} = (\cos \theta_{x_A} \mid 0\rangle + \sin \theta_{x_A} \mid 1\rangle) \cdot (\cos \theta_{x_A} \langle 0 \mid + \sin \theta_{x_A} \langle 1 \mid) \quad (6)$$

当 $y_A = 1$ 时,采取的测量算子如式(7)所示:

$$A_{x_A}^{y_A} = (-\sin \theta_{x_A} \mid 0\rangle + \cos \theta_{x_A} \mid 1\rangle) \cdot (-\sin \theta_{x_A} \langle 0 \mid + \cos \theta_{x_A} \langle 1 \mid) \quad (7)$$

Alice 根据输入 x_A 决定测量算子的策略参数 θ_{x_A} 。Bob 同时根据 x_B 决定相同形式的测量算子的策略参数 θ_{x_B} 。结合前文可知,参与博弈的双方获取的输入值均可 0 或者 1,因此量子博弈模型中双方平均收益分别如式(8)和式(9)所示:

$$Payoff_A(\theta_{x_A=0}, \theta_{x_A=1}, \theta_{x_B=0}, \theta_{x_B=1}) = \sum_{x_A, x_B \in \{0,1\}} P(x_A, x_B) \cdot P(y_A, y_B \mid x_A, x_B, \rho_{AB}) \cdot \mu_A(x_A, x_B, y_A, y_B) \quad (8)$$

$$Payoff_B(\theta_{x_A=0}, \theta_{x_A=1}, \theta_{x_B=0}, \theta_{x_B=1}) = \sum_{x_A, x_B \in \{0,1\}} P(x_A, x_B) \cdot P(y_A, y_B \mid x_A, x_B, \rho_{AB}) \cdot \mu_B(x_A, x_B, y_A, y_B) \quad (9)$$

在量子博弈模型中,当双方共享最大纠缠态

$$\mid \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 00 \rangle + \mid 11 \rangle) \text{ 且策略参数为 } (0, \pi/4,$$

$\pi/8, -\pi/8)$ 时^[28],双方的收益均可达到最大值

$$Payoff_A = Payoff_B = \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{8} \approx 0.64, \text{ 此时双方}$$

收益和为 1.28。结合式(3)和经典博弈模型下双方均衡点的收益情况可知,对每个玩家来说,量子策略的回报都高于经典策略的,并且博弈双方的收益和也突破了经典策略的收益。

3 面向量子博弈论的光量子芯片设计

本文提出了一种光量子芯片结构,可用于实验实现第2节的量子博弈模型,如图2所示。与图1对应,图2中采用可配置的双光子纠缠源生成源于建议的量子态;采用上下对称的2个等臂MZ(Mach-Zehnder)干涉仪实现量子策略,将玩家的策略参数映射为MZ干涉仪内部的相位控制器参数;采用符合计数测量得到玩家的输出结果。

3.1 量子博弈模型中量子系统的初态

量子博弈模型在双量子比特系统中进行博弈,纠缠态采用路径编码。如图2所示,用光子的路径模编码量子比特,上路径代表0,下路径代表1。由式(8)和式(9)可知,系统的初态会对双方的收益造成影响,芯片产生的可调节的纠缠初态形式如式(10)所示:

$$((e^{-i\theta} \cos \theta a_0^\dagger b_0^\dagger + \sin \theta a_1^\dagger b_1^\dagger) \mid 0 \rangle) \quad (10)$$

其中, a_i^\dagger 和 b_i^\dagger 分别表示2个玩家 Alice 和 Bob 对应路径 0 和 1 下的产生算子,用来生成2个光子。

2 个相位控制器分别用来调整纠缠度 θ 和相位 φ 。

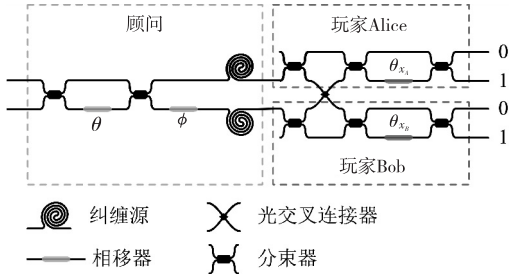


Figure 2 Design of photonic quantum chip

图 2 光量子芯片设计

通过调节相位控制器参数,可产生多种初态。当 $\varphi = 0$ 时,系统初态为可调节纠缠度的纠缠态: $\rho_{AB} = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$; 当 $\theta = 0, \varphi = 0$ 时,系统初态为 $\rho_{AB} = |00\rangle$; 当 $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ 时,系统初态为 $\rho_{AB} = |11\rangle$ 。

3.2 量子博弈模型中双方的策略与测量算子

根据第 2 节量子化的博弈过程介绍可知,双方根据输入值采取不同的策略参数配置投影测量的测量基。对应到芯片结构中的光学网络,双方的策略参数映射为如式(11)所示的二维酉矩阵的参数 θ :

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中, $U(\theta)$ 矩阵分别可由测量部分的 2 个可调内部相位控制器参数 θ_{x_A} 和 θ_{x_B} 的等臂 MZ 干涉仪实现。MZ 干涉仪包含 2 个 50 : 50 的分束器以及内外 2 个相位控制器。已知 50 : 50 的分束器的矩阵形式为 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, 相位控制器的矩阵形式为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta} \end{pmatrix}$ 。设置外相位控制器的相位为 π , 则外相位控制器的矩阵形式为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 那么可以得到 MZ 干涉仪关于内相位控制器的相位参数 $\theta_i, i = (x_A, x_B)$ 的表达式如式(12)所示:

$$\begin{aligned} U(\theta_i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta_i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &\quad -ie^{i\frac{\vartheta_i}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta_i}{2} & -\cos \frac{\theta_i}{2} \\ \cos \frac{\theta_i}{2} & \sin \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi = \pi - \theta_i} \\ &\quad -ie^{i\frac{\pi - \varphi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

由式(12)可知,通过调节相位控制器的参数 θ_i , 可以完成式(11)中任意酉矩阵的配置,即在光芯片中设置玩家选取的任意策略参数。

芯片路径的符合结果和玩家的输出结果相对应。如果在路径模 1 探测到光子,表示玩家输出 1; 在路径模 0 探测到光子,表示玩家输出 0。每一次的测量均表示双方进行了一次博弈。因此,根据式(6)和式(7)可知, Alice 的测量算子可进一步简化式(13):

$$A_{x_A}^{y_A} = \begin{cases} U(\theta_{x_A}) |0\rangle\langle 0| U^\dagger(\theta_{x_A}), y_A = 0 \\ U(\theta_{x_A}) |1\rangle\langle 1| U^\dagger(\theta_{x_A}), y_A = 1 \end{cases} = U(\theta_{x_A}) |y_A\rangle\langle y_A| U^\dagger(\theta_{x_A}) \quad (13)$$

同理 Bob 的测量算子可简化为式(14):

$$B_{x_B}^{y_B} = U(\theta_{x_B}) |y_B\rangle\langle y_B| U^\dagger(\theta_{x_B}) \quad (14)$$

当 Alice 和 Bob 的测量算子分别表达为式(13)和式(14)时,根据式(5)可知,双方获得输出结果为 (y_A, y_B) 的概率如式(15)所示:

$$\begin{aligned} (y_A, y_B) &\sim P(y_A, y_B | x_A, x_B, \rho_{AB}) = \\ &\quad \text{Tr}([A_{x_A}^{y_A} \otimes B_{x_B}^{y_B}] \cdot \rho_{AB}) = \\ &\quad \text{Tr}([U(\theta_{x_A}) |y_A\rangle\langle y_A| U^\dagger(\theta_{x_A}) \otimes \\ &\quad U(\theta_{x_B}) |y_B\rangle\langle y_B| U^\dagger(\theta_{x_B})] \cdot \rho_{AB}) = \\ &\quad \text{Tr}([U(\theta_{x_A}) \otimes U(\theta_{x_B})] \cdot |y_A y_B\rangle\langle y_A y_B| \cdot \\ &\quad [U^\dagger(\theta_{x_A}) \otimes U^\dagger(\theta_{x_B})] \cdot \rho_{AB}) = \\ &\quad \text{Tr}([U(\theta_{x_A}) \otimes U(\theta_{x_B})] \cdot \rho_{AB} \cdot \\ &\quad [U^\dagger(\theta_{x_A}) \otimes U^\dagger(\theta_{x_B})]) \cdot |y_A y_B\rangle\langle y_A y_B| \quad (15) \end{aligned}$$

结合式(13)和式(14)可知,为了获取双方的最终收益,需要根据玩家的输入,配置 2 组酉矩阵 $\{U(\theta_{x_A=0}), U(\theta_{x_A=1})\}$ 和 $\{U(\theta_{x_B=0}), U(\theta_{x_B=1})\}$, 分别对应 Alice 和 Bob 在输入值为 0 和 1 时采取的策略。为了获得最终的 Payoff_A 和 Payoff_B , 需要分别在光芯片的网络配置 4 组策略 $\{U(\theta_{x_A}), U(\theta_{x_B})\}$, 其中 $x_A, x_B = (0, 1)$, 从而得到最终的收益,分别如式(16)和式(17)所示:

$$\begin{aligned} \text{Payoff}_A(\theta_{x_A=0}, \theta_{x_A=1}, \theta_{x_B=0}, \theta_{x_B=1}) &= \\ \sum_{x_A, x_B \in \{0, 1\}} P(x_A, x_B) \cdot P(y_A, y_B | x_A, x_B, \rho_{AB}) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_A(x_A, x_B, y_A, y_B) = & \sum_{x_A, x_B, y_A, y_B} [P(x_A, x_B) \cdot \mu_A(x_A, x_B, y_A, y_B) \cdot \\ & \text{Tr}([U(\theta_{x_A}) \otimes U(\theta_{x_B})] \cdot \rho_{AB} \cdot \\ & [U^+(\theta_{x_A}) \otimes U^+(\theta_{x_B})] |y_A y_B\rangle \langle y_A y_B|)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Payoff}_B(\theta_{x_A=0}, \theta_{x_A=1}, \theta_{x_B=0}, \theta_{x_B=1}) = & \sum_{x_A, x_B \in \{0,1\}} P(x_A, x_B) \cdot P(y_A, y_B | x_A, x_B, \rho_{AB}) \cdot \\ & \mu_B(x_A, x_B, y_A, y_B) = \\ & \sum_{x_A, x_B, y_A, y_B} [P(x_A, x_B) \cdot \mu_B(x_A, x_B, y_A, y_B) \cdot \\ & \text{Tr}([U(\theta_{x_A}) \otimes U(\theta_{x_B})] \cdot \rho_{AB} \cdot \\ & [U^+(\theta_{x_A}) \otimes U^+(\theta_{x_B})] |y_A y_B\rangle \langle y_A y_B|)] \end{aligned} \quad (17)$$

4 光量子芯片实验与结果分析

本文在课题组的一款可编程硅基光量子芯片^[31]上映射实现了第2节提出的芯片结构,并完成了量子化的博弈过程实验演示。该芯片采用“蚊香”形状的长直波导的光子源,由相干激光同时对2个片上四波混频单光子源进行激发,利用滤波器将2个光源产生的信号光子和闲频光子分离。结合后选择技术产生路径纠缠的光子对。整体网络呈上下对称结构,均为 Reck 三角网络^[32]。通过测试发现,芯片保真度为99%。

通过第3节的博弈模型分析可知,经典博弈模型和量子博弈模型存在收益差别。经典博弈模型均衡点的实现有多种形式,本文在芯片上通过普通分离态模拟经典博弈模型。同时,为了研究经典建议和量子建议对博弈过程造成的影响,本文在芯片上通过纠缠态和混态进行了相关的实验。

本文考虑4种普通分离态: $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$,以及可变纠缠度的双光子纠缠态 $\cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$,其中 $\theta \in [0, \pi/2]$ 。为了进一步观察双方收益和从经典情形到量子情形的连续过渡情况,构造了下面所述的5种混态:

$$\begin{aligned} (1) & p * (|00\rangle \langle 00|) + (1-p) * (|00\rangle + |11\rangle) \\ & (\langle 00| + \langle 11|)/2; \\ (2) & p * (|01\rangle \langle 01|) + (1-p) * (|00\rangle + |11\rangle) \\ & (\langle 00| + \langle 11|)/2; \end{aligned}$$

$$(3) p * (|10\rangle \langle 10|) + (1-p) * (|00\rangle + \langle 11|) \\ (\langle 00| + \langle 11|)/2;$$

$$(4) p * (|11\rangle \langle 11|) + (1-p) * (|00\rangle + \langle 11|) \\ (\langle 00| + \langle 11|)/2;$$

$$(5) p * (|00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10| + \\ |11\rangle \langle 11|)/4 + (1-p) * (|00\rangle + \langle 11|) (\langle 00| + \\ \langle 11|)/2。$$

其中, $p \in [0, 1]$ 度量了混态中纠缠态的比例,变化步长为0.1。

以初态 $\cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$ 为例,设双方采取的策略参数 $\{\theta_{x_A=0}, \theta_{x_A=1}, \theta_{x_B=0}, \theta_{x_B=1}\}$ 为 $\{x_0, x_1, y_0, y_1\}$,将其代入第3节的式(16)和式(17),可得双方收益值的解析表达式分别如式(18)和式(19)所示:

$$\begin{aligned} \text{payoff}_A(x_0, x_1, y_0, y_1) = & \frac{1}{8}(\cos \theta \sin x_0 \sin y_0 + \sin \theta \cos x_0 \cos y_0)^2 + \\ & \frac{1}{8}(\cos \theta \sin x_1 \sin y_0 + \sin \theta \cos x_1 \cos y_0)^2 + \\ & \frac{1}{8}(\cos \theta \sin x_0 \sin y_1 + \sin \theta \cos x_0 \cos y_1)^2 + \\ & \frac{3}{16}(\cos \theta \cos x_1 \sin y_1 - \sin \theta \cos y_1 \sin x_1)^2 + \\ & \frac{1}{4}(\cos \theta \cos x_0 \cos y_0 + \sin \theta \sin x_0 \sin y_0)^2 + \\ & \frac{1}{4}(\cos \theta \cos x_1 \cos y_0 + \sin \theta \sin x_1 \sin y_0)^2 + \\ & \frac{3}{16}(\cos \theta \sin x_1 \cos y_1 - \sin \theta \cos x_1 \sin y_1)^2 + \\ & \frac{1}{4}(\cos \theta \cos x_0 \cos y_1 + \sin \theta \sin x_0 \sin y_1)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{payoff}_B(x_0, x_1, y_0, y_1) = & \frac{1}{4}(\cos \theta \sin x_0 \sin y_0 + \sin \theta \cos x_0 \cos y_0)^2 + \\ & \frac{1}{4}(\cos \theta \sin x_1 \sin y_0 + \sin \theta \cos x_1 \cos y_0)^2 + \\ & \frac{1}{4}(\cos \theta \sin x_0 \sin y_1 + \sin \theta \cos x_0 \cos y_1)^2 + \\ & \frac{3}{16}(\cos \theta \cos x_1 \sin y_1 - \sin \theta \cos y_1 \sin x_1)^2 + \\ & \frac{1}{8}(\cos \theta \cos x_0 \cos y_0 + \sin \theta \sin x_0 \sin y_0)^2 + \\ & \frac{1}{8}(\cos \theta \cos x_1 \cos y_0 + \sin \theta \sin x_1 \sin y_0)^2 + \end{aligned}$$

$$\frac{3}{16}(\cos \theta \sin x_1 \cos y_1 - \sin \theta \cos x_1 \sin y_1)^2 +$$
$$\frac{1}{8}(\cos \theta \cos x_0 \cos y_1 + \sin \theta \sin x_0 \sin y_1)^2$$

(19)

因此,在给定初态的情况下,可利用科学计算软件通过最优化方法得出系统处于不同初态时,双方收益和最大值时策略参数的理论值。本文使用 Mathematica 的 Nmaximize 函数进行玩家收益和的上限求解。理论结果表明,当初态为最大纠缠态和 4 种分离态时,玩家收益和的最大值分别与量子博弈和经典博弈的均衡点结果相对应。针对这一理论求解结果,本文使用求解得到的理论策略参数在芯片上进行实验验证。

表 2 为初态设置为分离态和最大纠缠态时的实验结果。本文测得当初态设置为给定的 4 种普通分离态时,此时双方的收益和实验值近似于 1.125,这与第 2 节所提出的经典博弈的收益值 1.125 相对应。同时,当系统初态为 $|00\rangle$ 和 $|11\rangle$ 时,双方收益分别对应经典博弈模型的前 2 种均衡点,此时双方由于收益不同产生利益冲突,各有不同均衡点倾向;系统初态为 $|01\rangle$ 和 $|10\rangle$ 时,双方收益分别对应经典博弈模型的第 3 种均衡点,此时双方收益相同。当系统初态为最大纠缠态时,双方各自的收益实验值分别为 0.603 和 0.670,收益和为 1.273,这近似于第 2 节所提出的量子博弈的收益情形,即在光量子平台上观察到了量子博弈突破了经典博弈的均衡收益上限。

图 3 给出了混态下双方收益的变化。随着 p 增加,纠缠态比例减少,混态 a、混态 d 和混态 e (分别如图 3a,图 3d 和图 3e 所示)下双方收益和也

Table 2 Test results under given initial state

表 2 给定初态下的测试结果

初态		理论值	实验值	误差
$(00\rangle+ 11\rangle)/\sqrt{2}$	Alice	0.640 0	0.603	-0.037 0
	Bob	0.640 0	0.670	+0.030 0
	收益和	1.280 0	1.273	-0.007 0
$ 00\rangle$	Alice	0.680 0	0.678	-0.002 0
	Bob	0.445 0	0.446	+0.001 0
	收益和	1.125 0	1.124	-0.001 0
$ 01\rangle$	Alice	0.562 5	0.561	-0.001 5
	Bob	0.562 5	0.562	-0.000 5
	收益和	1.125 0	1.123	-0.002 0
$ 10\rangle$	Alice	0.562 5	0.562	-0.000 5
	Bob	0.562 5	0.562	-0.000 5
	收益和	1.125 0	1.124	-0.001 0
$ 11\rangle$	Alice	0.445 0	0.445	+0.000 0
	Bob	0.680 0	0.677	-0.003 0
	收益和	1.125 0	1.122	-0.003 0

随之减少,混态 b 和混态 c (分别如图 3b 和图 3c 所示)则先减少后增加。混态 a、混态 d 和混态 e 的最小值分别对应纠缠态比例为 0 的时候,此时混态为前文的 4 种普通分离态,即对应经典博弈模型。而混态 b 和混态 c 下的最小值则对应纠缠比例参数 p 为 0.6 的时候,系统仍处于混态,此时双方收益和低于经典博弈模型的收益上限。这说明,并非所有的量子建议都一定会带来比经典模型更高的收益,也有可能低于经典模型的均衡上限。

为了进一步观察系统处于双光子纠缠态时,量子建议对博弈过程的影响。图 4 给出了不同纠缠度的初态 $\cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$ 的收益和的均衡

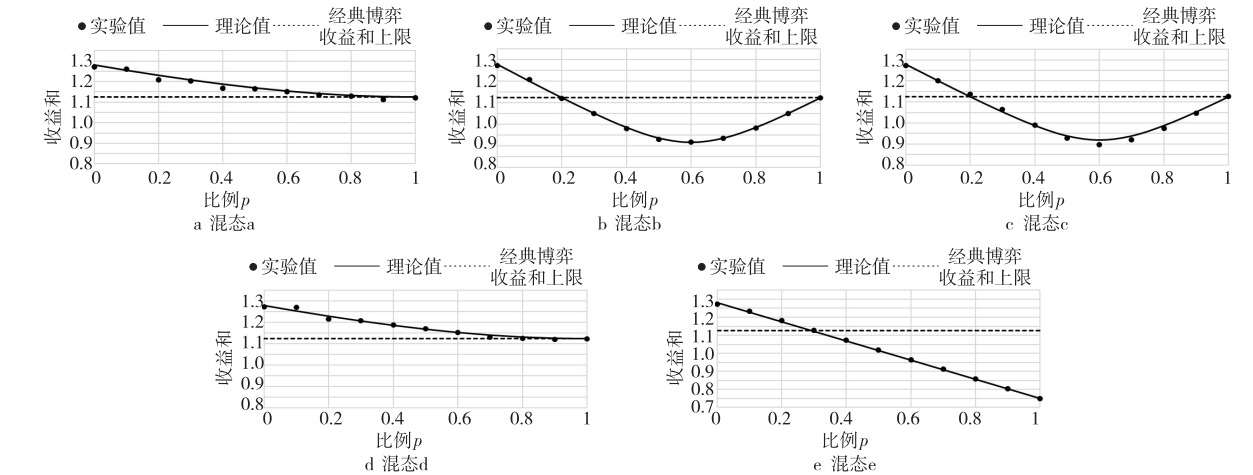


Figure 3 Evolution of the sum of payoff with the change of the proportion of entanglement under multiple mixed states
图 3 多种混态下收益和随着纠缠态比例变化的演化过程

上限的实验结果。当 $\theta = \pi/2$ 和 $\theta = 0$ 时,初态处于分离态,此时玩家收益和最低。当 $\theta = \pi/4$ 时,初态处于最大纠缠态,此时玩家收益和最高。实验结果表明,当系统为纠缠态时,随着纠缠态比例的增加,量子建议能够给玩家带来更高的收益和上限。

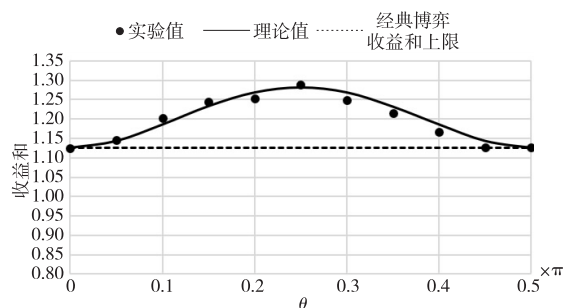


Figure 4 Process of the sum of payoff changing with entanglement degree under the entangled state

图4 纠缠态下收益和随着纠缠度变化的过程

5 结束语

量子博弈论的研究对于博弈论和量子信息均有重要意义。本文提出了一种面向量子博弈论的光量子芯片结构,并针对一种特定的利益冲突的双人贝叶斯博弈模型进行了多组片上实验。通过光芯片实验观察到了以下现象:

(1)可借助普通分离态模拟经典博弈模型,得到近似经典均衡的双方收益及收益总和。

(2)实验观察到量子博弈模型突破了经典博弈模型的收益上限。

(3)当量子博弈模型从经典情形到量子情形连续过渡时,实验数据显示量子建议并非一定能使量子博弈模型突破经典博弈的均衡上限。

(4)在纠缠态中,随着纠缠比例的增加,量子建议带给玩家的收益和上限也在增加。

参考文献:

- [1] Kakkad V, Shah H, Patel R, et al. A comparative study of applications of game theory in cyber security and cloud computing[J]. *Procedia Computer Science*, 2019, 155: 680-685.
- [2] Nash J. Non-cooperative games[J]. *Annals of Mathematics*, 1951, 54(2): 286-295.
- [3] Nash J F. Equilibrium points in n -person games[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1950, 36(1): 48-49.
- [4] Klarreich E. Playing by quantum rules[J]. *Nature*, 2001, 414(6861): 244-246.
- [5] Eisert J, Wilkens M, Lewenstein M. Quantum games and quantum strategies[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83

- (15): 3077-3080.
- [6] Meyer D A. Quantum strategies[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(5): 1052-1055.
- [7] Tomamichel M, Fehr S, Kaniewski J, et al. A monogamy-of-entanglement game with applications to device-independent quantum cryptography[J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15: 103002.
- [8] Acín A, Brunner N, Gisin N, et al. Device-independent security of quantum cryptography against collective attacks[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(23): 230501.
- [9] Brandão F G S L, Ramanathan R, Grudka A, et al. Robust device-independent randomness amplification with few devices[J]. *arXiv:1310.4544*, 2013.
- [10] Barak B, Brandão F G S L, Harrow A W, et al. Hypercontractivity, sum-of-squares proofs, and their applications[C] // *Proc of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 2012: 307-326.
- [11] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F. Quantum simulation[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2014, 86(1): 153-185.
- [12] Meyer D A. Quantum games and quantum algorithms[J]. *arXiv:quant-ph/0004092*, 2000.
- [13] Rieffel E, Polak W. An introduction to quantum computing for non-physicists[J]. *ACM Computing Surveys*, 2000, 32(3): 300-335.
- [14] Mitra A, Sivapriya K, Kumar A. Experimental implementation of a three qubit quantum game with corrupt source using nuclear magnetic resonance quantum information processor[J]. *Journal of Magnetic Resonance*, 2007, 187(2): 306-313.
- [15] Buluta I M, Fujiwara S, Hasegawa S. Quantum games in ion traps[J]. *Physics Letters A*, 2006, 358(2): 100-104.
- [16] Cao S, Fang M F, Zheng X J, et al. Scheme for implementation of quantum game in cavity QED[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2008, 49(1): 100-102.
- [17] Cao S, Fang M F, Liu J B, et al. Theoretical analysis of quantum game in cavity QED[J]. *Chinese Physics B*, 2009, 18(3): 898-901.
- [18] Zhou L, Kuang L M. Proposal for optically realizing a quantum game[J]. *Physics Letters A*, 2003, 315(6): 426-430.
- [19] Lu J, Zhou L, Kuang L M. Linear optics implementation for quantum game with two players[J]. *Physics Letters A*, 2004, 330(1-2): 48-53.
- [20] Cao S, Fang M F. Linear optics implementation for quantum game under quantum noise[J]. *Chinese Physics*, 2006, 15(2): 276-280.
- [21] Schmid C, Flitney A P, Wieczorek W, et al. Experimental implementation of a four-player quantum game[J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12: 063031.
- [22] Du J F, Li H, Xu X D, et al. Experimental realization of quantum games on a quantum computer[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(13): 137902.
- [23] Prevedel R, Stefanov A, Walther P, et al. Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer[J]. *New Journal of Physics*, 2007, 9: 205.
- [24] Solmeyer N, Linke N M, Figgatt C, et al. Demonstration of a

- Bayesian quantum game on an ion-trap quantum computer[J]. Quantum Science and Technology, 2018, 3(4): 045002.
- [25] Li H W, Przeslak S, Niskanen A O, et al. Reconfigurable controlled two-qubit operation on a quantum photonic chip[J]. New Journal of Physics, 2011, 13: 115009.
- [26] Shadbolt P J, Verde M R, Peruzzo A, et al. Generating, manipulating and measuring entanglement and mixture with a reconfigurable photonic circuit[J]. Nature Photonics, 2012, 6(1): 45-49.
- [27] Wang D, Wu J, Yi X. Optical quantum computing[C]//Proc of the 11th International Conference on Natural Computation, 2015: 390-397.
- [28] Pappa A, Kumar N, Lawson T, et al. Nonlocality and conflicting interest games[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(2): 020401.
- [29] Harsanyi J C. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, I-III: Part I. The basic model[J]. Management Science, 1967, 14(3): 159-182.
- [30] Osborne M J. An introduction to game theory[M]. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [31] Qiang X, Wang Y, Xue S, et al. Implementing graph-theoretic quantum algorithms on a silicon photonic quantum walk processor[J]. Science Advances, 2021, 7(9): eabb8375.
- [32] Reck M, Zeilinger A, Bernstein H J, et al. Experimental realization of any discrete unitary operator[J]. Physical Review Letters, 1994, 73(1): 58-61.

作者简介:



曾茹

曾茹(1998-),女,河南信阳人,硕士生,研究方向为量子计算。**E-mail:** ruzeng@quanta.org.cn

ZENG Ru, born in 1998, MS candidate, her research interest includes quantum computing.



詹俊伟

詹俊伟(1998-),男,河南信阳人,硕士生,研究方向为量子计算。**E-mail:** jun-weizhan@quanta.org.cn

ZHAN Jun-wei, born in 1998, MS candidate, his research interest includes quantum computing.



薛诗川

薛诗川(1993-),男,湖南常德人,博士生,研究方向为量子计算。**E-mail:** shichuanxue@quanta.org.cn

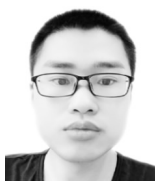
XUE Shi-chuan, born in 1993, PhD candidate, his research interest includes quantum computing.



王易之

王易之(1995-),男,山西长治人,博士生,研究方向为量子计算。**E-mail:** wangy-izhi13a@nudt.edu.cn

WANG Yi-zhi, born in 1995, PhD candidate, his research interest includes quantum computing.



王冬阳

王冬阳(1991-),男,辽宁凤城人,博士,助理研究员,研究方向为量子计算。**E-mail:** wangdongyang@nudt.edu.cn

WANG Dong-yang, born in 1991, PhD, assistant research fellow, his research interest includes quantum computing.



刘英文

刘英文(1989-),男,山东潍坊人,博士,助理研究员,研究方向为量子计算。**E-mail:** yingwenliu@nudt.edu.cn

LIU Ying-wen, born in 1989, PhD, assistant research fellow, his research interest includes quantum computing.



吴俊杰

吴俊杰(1981-),男,浙江杭州人,博士,研究员,CCF 杰出会员(12744D),研究方向为量子计算、光量子芯片和量子计算系统技术。**E-mail:** junjiewu@nudt.edu.cn

WU Jun-jie, born in 1981, PhD, research fellow, CCF member(12744D), his research interests include quantum computing, integrated photonic chip, and quantum computer architecture.