CN 43-1258/TP
ISSN 1007-130X

计算机工程与科学
Computer Engineering & Science

第45卷第6期2023年6月
Vol. 45, No. 6, Jun. 2023

文章编号:1007-130X(2023)06-1134-07

命题逻辑中一种矛盾体生成新方法*

黎兴玉[1],何星星[1],马 雪[1],李莹芳[2]

(1. 西南交通大学数学学院,四川 成都 610031;2. 西南财经大学计算机与人工智能学院,四川 成都 611130)

摘　要:人工智能是用计算机来模拟人的某些思维过程和智能行为的学科。自动推理中的归结原理是一种简洁、可靠且完备的推理规则。矛盾体的动态多子句协同演绎理论不仅是归结原理的重要延拓,而且具有较高的推理演绎效率。由于矛盾体的结构复杂、生成策略较少,因此在矛盾体的动态演绎可靠性和完备性的基础上,提出复合2个或多个矛盾体的部分子句的不同策略,为矛盾体的构造提供了一种有效的方法。

关键词:命题逻辑;矛盾体;矛盾体的复合性质;不可满足性

中图分类号:TP181　　　　**文献标志码**:A

doi:10.3969/j.issn.1007-130X.2023.06.021

A new contradiction generation method in propositional logic

LI Xing-yu[1], HE Xing-xing[1], MA Xue[1], LI Ying-fang[2]

(1. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031;
2. School of Computing and Artificial Intelligence, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China)

Abstract: Artificial Intelligence (AI) is a discipline that simulates some thinking processes and intelligent behaviors of human beings with computers. The resolution principle in automatic reasoning is a concise, reliable and complete reasoning rule. The contradiction separation based dynamic multi-clause synergized automated deduction is not only a crucial extension of resolution principle, but also has higher deductive efficiency. Due to the complex structure of contradictions and fewer generation strategies, the paper proposes different strategies for compounding the partial clauses of two or more contradictions on the basis of the dynamic deduction reliability theorem and completeness theorem of contradictions, which provides an effective method for the construction of contradictions.

Key words: propositional logic; contradiction; compound properties of contradictions; unsatisfiability

1　引言

自17世纪末叶,德国数学家Leibniz创立了数理逻辑以来,广大研究人员就开启了探索用计算机模拟人类证明命题逻辑定理的推理过程,并随着《逻辑理论机》的面世,自动定理证明ATP(Automatic Theorem Prover)[1]进入了人们的视野。自动定理证明在软硬件领域[2]、专家系统[3]、问答系统[4]、语义网、知识图谱等知识表示和知识推理领域[5],以及人工智能中的模型推理研究[6]和数学定理证明[7,8]等领域都扮演着重要的角色。1965年,Robinson[9]在Herbrand[10]定理的基础上,提出了归结原理。1972年,Wos等[11]建立了一个以归结方法为推理规则的自动推理系统AURA(AUtomated Reasoning Assistant),推动了自动定理证明的发展。

在自动定理证明的发展中,产生了许多归结的

* 收稿日期:2021-08-25;修回日期:2021-12-27
基金项目:国家自然科学基金(62106206);教育部人文社科项目(19YJCZH048,20XJCZH016);中央高校基本科研业务费专项资金(2682020ZT107)
通信作者:何星星(x.he@home.swjtu.edu.cn)
通信地址:610031 四川省成都市西南交通大学数学学院
Address: School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, P. R. China

改进策略,例如锁归结、语义归结[12,13]和线性归结[14]等。这些归结变体及改进策略通过限制子句或文字归结减少归结式的产生,从而提高归结效率,但仍存在许多未能解决的实际问题。基于此,Xu 等[15]建立了基于标准矛盾体分离的动态多子句协同自动演绎理论,该理论具有可靠性与完备性。将矛盾体分离理论的动态多子句协同演绎用于自动推理系统,能更有效地提高自动推理系统的演绎能力和效率。在此理论的基础上,徐扬等[16]将命题逻辑提升到一阶逻辑,先后提出了 CSE (Contradiction Separation Extention)和 CSE_E 等证明器。且自 2018 年以来,证明器在自动定理证明系统竞赛中连续获得亚军。

Cao 等[17]将 CSE 证明器用于定理证明,为进一步改进基于矛盾体分离演绎理论与方法,设计了 CSE 与 E 的结合版本 CSE_E,并通过实验检验,证明了其性能要优于 E 的。紧接着,Cao 等[18]进一步提出了 2 种新的基于优化证明搜索的多子句动态推导算法。随后,Cao 等[19]将 S-CS(Standard Contradiction Separation)规则与 Prover9 结合,提出了一种基于标准矛盾分离规则的新型一阶逻辑定理证明器,不仅提高了演绎能力,而且成功解决了 103 个其他证明器均未解决的问题。继而,Zhong 等[20]提出了一种新的多子句动态标准矛盾体分离推理规则及其自动推导理论,提升了证明器的效率。

实验表明,矛盾体本身延拓了归结方法的优越性,且矛盾体与自动推理具有良好的适应性,因此,矛盾体在推动自动定理证明的发展中具有重要意义。在命题逻辑中,标准矛盾体与不可满足的命题逻辑公式等价[15],例如 $MU(1)MU(2)$等[21]皆为矛盾体,将其结构类型提供给证明器,能进一步提高证明效率。然而,到目前为止,针对矛盾体结构的研究较少,为了更好地发挥矛盾体的作用,需要提出矛盾体构造的有效方法。唐雷明等[22]研究了矛盾体的结构性质,总结出一些生成矛盾体的删除文字策略,但用删除文字策略生成新的矛盾体的效率较低,且得到的矛盾体结构简单,类型不够丰富。

基于此,本文采用复合 2 个或多个矛盾体的部分子句的形式,提出一种新的矛盾体生成复合策略。根据矛盾体之间子句复合个数,分为单子句析取复合和多子句析取复合 2 部分进行研究。通过分析矛盾体的结构发现,单子句析取复合中,不需要添加新的子句即可生成矛盾体;而多子句析取复合中,则需要考虑复合子句中是否含有相同的命题变元等因素,再选择添加适当子句,生成新的矛盾体。同时,根据本文提出的多个复合策略及算法,通过实例分析,可以得到多个互异的矛盾体,展示了复合策略的有效性和多样性。以本文提出的理论作为依据,编写矛盾体的生成算法,为进一步在计算机上实现矛盾体的生成提供基础。

下面给出相关预备知识:

定义 1(文字、子句、子句集[23]) 在命题逻辑公式中,称原子公式及其否定为文字,有限多个文字的析取为子句,子句集 S 为 S 中所有子句合取构成的公式。

定义 2(合取范式[23]) 有限多个子句的合取叫做合取范式,记为 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$,其中 C_i 是子句,$i=1,2,\cdots,n$。

定义 3(互补对[23]) 设 p 是一个原子,文字 p 和 $\sim p$ 称为一个互补对。

定义 4(不可满足性[24]) S 是命题逻辑中的子句集,若存在一个赋值 v,使得 S 在 v 下的真值为 1,则子句集 S 是可满足的,否则子句集 S 是不可满足的。

定义 5(标准矛盾体[15]) 设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是子句集。如果对任意 $(p_1,p_2,\cdots,p_m)\in\prod_{i=1}^{m}C_i$,$(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 至少存在一个互补对,则 $S=\wedge_{i=1}^{m}C_i$ 称为标准矛盾体(简称 SC)。如果 $\wedge_{i=1}^{m}C_i$ 是不可满足的,则 $S=\wedge_{i=1}^{m}C_i$ 称为准矛盾体(简称 QC)。

定义 6(Tautology 规则[23]) 设在逻辑公式中的子句集 S 中有重言式子句,即子句 C_i 同时包含文字 x 及其负文字 $\sim x$,则删去子句集 S 中的所有重言式子句,得到子句集 S'。

定理 1(命题逻辑中基于 CS 的动态演绎可靠性定理[15]) 设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是命题逻辑中的子句集。$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_t$ 是动态演绎序列。如果 Φ_t 是一个空子句,则 S 是不可满足的。

定理 2(命题逻辑中基于 CS 的动态演绎完备性定理[15]) 设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是命题逻辑中的子句集。如果 S 是不可满足的,则存在一个基于动态到空子句的演绎序列。

本文研究不含冗余子句的标准矛盾体(即若删除标准矛盾体中的任意一个子句,均不构成标准矛盾体)。若一个子句含有 2 个相同的命题变元,保留一个即可。

符号说明:

(1) $\wedge_{i=1}^{m_1}B_i^1$, $\wedge_{i=1}^{m_2}B_i^2,\cdots$, $\wedge_{i=1}^{m_n}B_i^n$ 表示一簇

标准矛盾体,其中,$\wedge_{i=1}^{m_k} B_i^k$ 表示第 k 个标准矛盾体,m_k 表示第 k 个标准矛盾体中子句的个数,i 是指标(当涉及到多个子句复合时用 $B_{i_u}^k$ 和 $B_{i_v}^k$ 表示第 k 个标准矛盾体中 2 个不同的子句)。

(2)$(\wedge_{i=1}^{n} B_i)\backslash B_i$ 表示从 $\wedge_{i=1}^{n} B_i$ 中删去 B_i,其中 B_i 是 $\wedge_{i=1}^{n} B_i$ 的任意子句;子句是由文字析取而成的,例如:$B_i=\vee_{x=1}^{k} p_x$,$C_j=\vee_{y=1}^{l} q_y$;本文用 B_i、C_j 等表示子句,用 p_x、q_y 等表示文字。

2 矛盾体复合性质

2.1 单子句析取复合

引理 1 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m} B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n} C_j$ 是标准矛盾体,S_1 和 S_2 中不含相同的命题变元,则 $(S_1\backslash B_i)\wedge(S_2\backslash C_j)\wedge(B_i\vee C_j)$ 是标准矛盾体。

证明 已知 S_1 和 S_2 均为标准矛盾体,即 S_1 和 S_2 是不可满足的,由于 $(S_1\backslash B_i)\wedge(S_2\backslash C_j)\wedge(B_i\vee C_j)=(S_1\wedge(S_2\backslash C_j))\vee((S_1\backslash B_i)\wedge S_2)$,显然 $(S_1\wedge(S_2\backslash C_j))\vee((S_1\backslash B_i)\wedge S_2)$ 是不可满足的,又由于在命题逻辑中标准矛盾体和不可满足性是等价的[1],因此引理 1 得证。 □

定理 3 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m} B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n} C_j$ 是标准矛盾体,若存在 $p_i\in B_i$,$p_i\in C_j$,则 $(S_1\backslash B_i)\wedge(S_2\backslash C_j)\wedge((B_i\backslash p_i)\vee C_j)$ 是标准矛盾体。

证明 根据引理 1,结论显然成立。 □

定理 4 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m} B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n} C_j$ 是标准矛盾体,若存在 $p_i\in B_i$,$\sim p_i\in C_j$,则有 $(S_1\backslash B_i)\wedge(S_2\backslash C_j)$ 是标准矛盾体。

证明 根据引理 1 可知 $(S_1\backslash B_i)\wedge(S_2\backslash C_j)\wedge(B_i\vee C_j)$ 是标准矛盾体,又由于 $p_i\in B_i$,$\sim p_i\in C_j$,因此 $B_i\vee C_j$ 是重言式,所以根据 Tautology 规则删去 $B_i\vee C_j$,即得 $(S_1\backslash B_i)\wedge(S_2\backslash C_j)$ 是标准矛盾体。 □

定理 5 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m_1} B_i^1$,$S_2=\wedge_{i=1}^{m_2} B_i^2$,…,$S_n=\wedge_{i=1}^{m_n} B_i^n$ 是标准矛盾体,$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中不含相同的命题变元,则 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash(B_{i_1}^2\wedge B_{i_2}^2))\wedge\cdots\wedge(S_n\backslash B_{i_1}^n)\wedge(B_i^1\vee B_{i_1}^2)\wedge(B_{i_2}^2\vee B_{i_1}^3)\wedge\cdots\wedge(B_{i_2}^{n-1}\vee B_{i_1}^n)$ 是标准矛盾体。

证明 用数学归纳法,当 $n=2$ 时,结论显然成立。假设当 $n=k-1$ 时结论成立,验证当 $n=k$ 时结论是否成立。因为当 $n=k-1$ 时结论成立,所以 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash(B_{i_1}^2\wedge B_{i_2}^2))\wedge\cdots\wedge(S_{k-1}\backslash B_{i_1}^{k-1})\wedge(B_i^1\vee B_{i_1}^2)\wedge(B_{i_2}^2\vee B_{i_1}^3)\wedge\cdots\wedge(B_{i_2}^{k-2}\vee B_{i_1}^{k-1})$ 是标准矛盾体,又因为当 $n=2$ 时结论成立,取 $B_{i_2}^{k-1}\in(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash(B_{i_1}^2\wedge B_{i_2}^2))\wedge\cdots\wedge(S_{k-1}\backslash B_{i_1}^{k-1})\wedge(B_i^1\vee B_{i_1}^2)\wedge(B_{i_2}^2\vee B_{i_1}^3)\wedge\cdots\wedge(B_{i_2}^{k-2}\vee B_{i_1}^{k-1})$ 与 $B_{i_1}^k\in S_k$ 作复合,所以 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash(B_{i_1}^2\wedge B_{i_2}^2))\wedge\cdots\wedge(S_{k-1}\backslash(B_{i_1}^{k-1}\wedge B_{i_2}^{k-1}))\wedge(B_i^1\vee B_{i_1}^2)\wedge(B_{i_2}^2\vee B_{i_1}^3)\wedge\cdots\wedge(B_{i_2}^{k-2}\vee B_{i_1}^{k-1})\wedge(B_{i_2}^{k-1}\vee B_{i_1}^k)\wedge(S_k\backslash B_{i_1}^k)$ 是标准矛盾体,即 $n=k$ 时结论成立。 □

定理 6 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m_1} B_i^1$,$S_2=\wedge_{i=1}^{m_2} B_i^2$,…,$S_n=\wedge m_{n\,i=1} B_i^n$ 是标准矛盾体,$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中不含相同的命题变元,则 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash B_i^2)\wedge\cdots\wedge(S_n\backslash B_i^n)\wedge(B_i^1\vee B_i^2\vee\cdots\vee B_i^n)$ 是标准矛盾体。

证明 用数学归纳法,当 $n=2$ 时,结论显然成立。假设当 $n=k-1$ 时结论成立,验证当 $n=k$ 时结论是否成立。因为当 $n=k-1$ 时结论成立,所以 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash B_i^2)\wedge\cdots\wedge(S_{k-1}\backslash B_i^{k-1})\wedge(B_i^1\vee B_i^2\vee\cdots\vee B_i^{k-1})$ 是标准矛盾体,又因为当 $n=2$ 时,结论成立,取 $(B_i^1\vee B_i^2\vee\cdots\vee B_i^{k-1})\in(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash B_i^2)\wedge\cdots\wedge(S_{k-1}\backslash B_i^{k-1})\wedge(B_i^1\vee B_i^2\vee\cdots\vee B_i^{k-1})$ 与 $B_i^n\in S_n$ 作复合,所以 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash B_i^2)\wedge\cdots\wedge(S_k\backslash B_i^k)\wedge(B_i^1\vee B_i^2\vee\cdots\vee B_i^n)$ 是标准矛盾体,即当 $n=k$ 时结论成立。 □

定理 7 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m_1} B_i^1$,$S_2=\wedge_{i=1}^{m_2} B_i^2$,…,$S_n=\wedge_{i=1}^{m_n} B_i^n$ 是标准矛盾体,若存在 $p_i\in B_i^k$,$\sim p_i\in B_i^l(1\leqslant k,l\leqslant n)$,则 $(S_1\backslash B_i^1)\wedge(S_2\backslash B_i^2)\wedge\cdots\wedge(S_n\backslash B_i^n)$ 是标准矛盾体。

证明 由定理 6 和 Tautology 规则即可得证。 □

2.2 多子句析取复合

引理 2 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m} B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n} C_j$ 是标准矛盾体,S_1 和 S_2 不含相同的命题变元,令 $SC=(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge C_{n+1}\wedge C_{n+2}$(其中 C_{n+1} 和 C_{n+2} 是由 S_1 和 S_2 中的子句组成的),若 SC 是标准矛盾体,当且仅当 C_{n+1} 和 C_{n+2} 满足下列条件之一:

(1) $C_{n+1}=B_{i_1}$,$C_{n+2}=B_{i_2}$;

(2) $C_{n+1}=C_{j_2}$,$C_{n+2}=C_{j_1}$;

(3) $C_{n+1}=B_{i_1}\vee C_{j_2}$,$C_{n+2}=B_{i_2}$;

(4) $C_{n+1}=B_{i_1}\vee C_{j_2}$,$C_{n+2}=C_{j_1}$;

(5) $C_{n+1}=B_{i_1}$,$C_{n+2}=B_{i_2}\vee C_{j_1}$;

(6) $C_{n+1}=C_{j_2}$,$C_{n+2}=B_{i_2}\vee C_{j_1}$;

(7) $C_{n+1}=B_{i_1}\vee C_{j_2}, C_{n+2}=B_{i_2}\vee C_{j_1}$;

(8) $C_{n+1}=B_{i_1}, C_{n+2}=C_{j_1}$;

(9) $C_{n+1}=C_{j_2}, C_{n+2}=B_{i_2}$。

证明 用反证法证明充分性,分以下 2 种情况讨论:

(1)若不添加任何新子句即可使得 SC 是标准矛盾体,即 C_{n+1} 和 C_{n+2} 是空子句。因为 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})=(S_1\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2})))\vee((S_1\backslash B_{i_2})\wedge(S_2\backslash C_{j_1}))\vee((S_1\backslash B_{i_1})\wedge(S_2\backslash C_{j_2}))\vee((S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge S_2)$,又由于 S_1 和 S_2 是不可满足的,且 S_1 和 S_2 中不存在冗余子句,因此 $S_1\backslash B_{i_1}$、$S_1\backslash B_{i_2}$、$S_2\backslash C_{j_1}$ 和 $S_2\backslash C_{j_2}$ 均是可满足的,所以 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})$ 是可满足的,即 SC 不是标准矛盾体。

(2)根据(1)可知不添加任何子句的情况下,不能构成标准矛盾体,因此,不妨假设添加子句集 D,使得 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge D$ 是一个标准矛盾体。由于 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge D=(S_1\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge D)\vee((S_1\backslash B_{i_2})\wedge(S_2\backslash C_{j_1})\wedge D)\vee((S_1\backslash B_{i_1})\wedge(S_2\backslash C_{j_2})\wedge D)\vee((S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge S_2\wedge D)$,因此可以注意到,只要使得 $(S_1\backslash B_{i_1})\wedge(S_2\backslash C_{j_2})\wedge D$,$(S_1\backslash B_{i_2})\wedge(S_2\backslash C_{j_1})\wedge D$ 都为不可满足即可。

观察可知,D 至少为 2 个子句的合取,即至少添加 2 个子句,不妨设 $D=C_{n+1}\wedge C_{n+2}$,且在只考虑添加原矛盾体中的子句的情况下,C_{n+1} 只能是 B_{i_1} 和 C_{j_2} 的组合,C_{n+2} 只能是 B_{i_2} 和 C_{j_1} 的组合。当 $C_{n+1}=B_{i_1}$,$C_{n+2}=B_{i_2}$ 或 $C_{n+1}=C_{j_2}$,$C_{n+2}=C_{j_1}$ 时,显然成立,即条件①和条件②成立。下面验证条件③:当 $C_{n+1}=B_{i_1}\vee C_{j_2}$,$C_{n+2}=B_{i_2}$ 时,有 $(S_1\backslash B_{i_1})\wedge(S_2\backslash C_{j_2})\wedge D=(S_1\backslash B_{i_1})\wedge(S_2\backslash C_{j_2})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})\wedge B_{i_2}=(S_1\wedge(S_2\backslash C_{j_2}))\vee((S_1\backslash B_{i_1})\wedge S_2)$,$(S_1\backslash B_{i_2})\wedge(S_2\backslash C_{j_1})\wedge D=(S_1\backslash B_{i_2})\wedge(S_2\backslash C_{j_1})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})\wedge B_{i_2}=((S_1)\wedge(S_2\backslash C_{j_1}))\vee(S_1\wedge(S_2\backslash C_{j_1}))$ 均是不可满足的。

同理,条件④~条件⑨均可以验证,因此若 SC 是标准矛盾体,则在所给的条件下,C_{n+1} 和 C_{n+2} 满足条件①~条件⑨中的一个。

必要性显然。

综上,在所给条件下,若 SC 是标准矛盾体,当且仅当 C_{n+1} 和 C_{n+2} 满足条件①~条件⑨之一即可,得证。 □

定理 8 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体,若存在 $p_1\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}$,$\sim p_1\in C_{j_1}\wedge C_{j_2}$,则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))$ 是标准矛盾体。

证明 由引理 2 可得 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_1})$ 是标准矛盾体,又因为 $p_1\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}$,$\sim p_1\in C_{j_1}\wedge C_{j_2}$,所以 $B_{i_1}\vee C_{j_1}$,$B_{i_2}\vee C_{j_2}$,$B_{i_1}\vee C_{j_2}$ 与 $B_{i_2}\vee C_{j_1}$ 均为重言式,则根据 Tautology 规则删去重言式,得 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))$ 是不可满足的,即结论得证。 □

定理 9 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体,若存在 $p_1\in B_{i_1}\wedge C_{j_1}$,$\sim p_1\in B_{i_2}\wedge C_{j_2}$,则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})$ 是标准矛盾体。

证明 同定理 8。 □

定理 10 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体,若存在 $p_1\in B_{i_1}$,$\sim p_1\in C_{j_2}$,则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge B_{i_2}$,$(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge C_{j_1}$ 和 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_1})$ 都是标准矛盾体。

证明 由引理 2 和 Tautology 规则即可得证。 □

引理 3 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体,S_1 和 S_2 中不含相同的命题变元,则 $SC=(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_3})$ 是标准矛盾体。

证明 按照标准矛盾体的定义验证。从 SC 中的每个子句中任取 1 个文字组成文字集,如果文字集中至少存在 1 个互补对,则 SC 是标准矛盾体。由于 S_1 和 S_2 是标准矛盾体,因此,如果文字集中存在从 S_1 或 S_2 的全部子句中选取的文字,则在文字集中至少存在 1 个互补对。

按如下步骤选取文字,组成文字集,首先从 $S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3})$ 和 $S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3})$ 中的每个子句任取 1 个文字,再从剩余的 9 个子句中各任取 1 个文字组成文字集。下面说明从剩余的 9 个子句中选取文字时,子句 B_{i_1}、B_{i_2} 和 B_{i_3} 或者 C_{j_1}、C_{j_2} 和 C_{j_3} 中的文字均会被选取到,即文字

集中一定会存在从 S_1 或 S_2 的全部子句中选取的文字，即文字集中至少存在1个互补对。

(1)令 $S_3=(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_3})$ 是 SC 的子句集，假设文字集中未同时选取到子句 B_{i_1}、B_{i_2} 和 B_{i_3} 中的文字，不妨假设未含 B_{i_1} 中的文字，例如，在选取 $B_{i_1}\vee C_{j_1}$ 中的文字时，选取 C_{j_1} 中的文字。根据 S_3 的结构发现，如果从 S_3 中选取的文字中不含 B_{i_1} 中的文字，则 C_{j_1}、C_{j_2} 和 C_{j_3} 中的文字均会被选取到。假设不含 B_{i_2} 和 B_{i_3} 中的文字的情况，同理可得。

(2)假设未同时含有子句 C_{j_1}、C_{j_2} 和 C_{j_3} 中的文字的情况与(1)同理。

综上，按照标准矛盾体从 SC 中选取的文字集中至少存在1个互补对，即 SC 是标准矛盾体，结论得证。 □

定理11 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体，若存在 $p_i\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}$，$\sim p_i\in C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}$，则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))$ 是标准矛盾体。

证明 因为根据引理3可知 $SC=(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_3})$ 是标准矛盾体，又因为 $p_i\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}$，$\sim p_i\in C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}$，所以 $B_{i_1}\vee C_{j_1}$，$B_{i_1}\vee C_{j_2}$，…，$B_{i_3}\vee C_{j_3}$ 均是重言式，因此根据 Tautology 规则删去 SC 中的重言式得到 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))$，所以 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))$ 是标准矛盾体，结论得证。 □

定理12 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体，若存在 $p_1\in B_{i_1}\wedge C_{j_1}$，$\sim p_1\in B_{i_2}\wedge C_{j_2}$，则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_1})$ 是标准矛盾体。

证明 根据引理3和 Tautology 规则即可得证。 □

定理13 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体，若存在 $p_i\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge C_{j_1}\wedge C_{j_2}$，$\sim p_i\in B_{i_3}\wedge C_{j_3}$，则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge B_{i_3}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge C_{j_3}))\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_2})\wedge(B_{i_3}\vee C_{j_3})\wedge(B_{i_2}\vee C_{j_1})\wedge(B_{i_1}\vee C_{j_2})$ 是标准矛盾体。

证明 根据引理3和 Tautology 规则即可得证。 □

定理14 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体，S_1 和 S_2 中不含相同的命题变元，则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge\cdots\wedge B_{i_p}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge\cdots\wedge C_{j_p}))\wedge(B_{i_1}\wedge(\vee_{j=j_1}^{j_p}C_j))\wedge(B_{i_2}\wedge(\vee_{j=j_1}^{j_p}C_j))\wedge\cdots\wedge(B_{i_p}\wedge(\vee_{j=j_1}^{j_p}C_j))$ 是标准矛盾体。

证明 同引理3。 □

定理15 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体，若存在 $p_i\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge\cdots\wedge B_{i_p}$，$\sim p_i\in C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge\cdots\wedge C_{j_p}(\min\{m,n\}\geqslant p)$，则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge\cdots\wedge B_{i_p}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge\cdots\wedge C_{j_p}))$ 是标准矛盾体。

证明 根据定理14和 Tautology 规则即可得证。 □

定理16 令 $S_1=\wedge_{i=1}^{m}B_i$ 与 $S_2=\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 是标准矛盾体，若存在 $p_i\in B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge\cdots\wedge B_{i_k}\wedge C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge\cdots\wedge C_{j_k}$，$\sim p_i\in B_{i_{k+1}}\wedge C_{j_{k+1}}(\min\{m,n\}\geqslant p>k)$，则 $(S_1\backslash(B_{i_1}\wedge B_{i_2}\wedge\cdots\wedge B_{i_p}))\wedge(S_2\backslash(C_{j_1}\wedge C_{j_2}\wedge\cdots\wedge C_{j_p}))\wedge(B_{i_1}\wedge((\vee_{j=j_1}^{j_p}C_j)\backslash C_{j_{k+1}}))\wedge(B_{i_2}\wedge((\vee_{j=j_1}^{j_p}C_{j_1})\backslash C_{j_{k+1}}))\wedge\cdots\wedge(B_{i_{k+1}}\wedge(\vee_{j=j_{k+1}}^{j_p}C_j))\wedge\cdots\wedge(B_{i_p}\wedge((\vee_{j=j_1}^{j_p}C_j)\backslash C_{j_{k+1}}))$ 是标准矛盾体。

证明 根据引理3和 Tautology 规则即可得证。 □

3 算法框架

算法1 构造复合子句

输入： 子句 $B=\vee_{x=1}^{k}p_x$，$C=\vee_{y=1}^{l}q_y$。

输出： 复合子句 $C=F(B,C)$。

```
初始化 C[k+l]=∅;
C[k+1:k+l]=q_1:q_l;
FOR x=1 TO k DO
  IF ~p_x≠q_1&…&~p_x≠q_l THEN
    IF p_x≠q_1&…&p_x≠q_l THEN
      C[x]=←p_x;
    ELSE C[x]←null;
    END IF
  ELSE C[k+l]=∅;
    BREAK;
  END IF
```

12. **END FOR**

算法 2 基于单子句复合标准矛盾体

输入:矛盾体 $\wedge_{i=1}^{m}B_i$,$\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 。

输出:矛盾体 SC 。

1. 初始化 SC;
2. **FOR** $i=1$ TO m **DO**
3. **FOR** $j=1$ TO n **DO**
4. $C=F(B_i,C_j)$;
5. $SC[i][j]\leftarrow((\wedge_{i=1}^{m}B_i)\backslash B_i)\wedge((\wedge_{j=1}^{n}C_j)\backslash C_j)\wedge C$;
6. **END FOR**
7. **END FOR**
8. **RETURN** SC;

例 1 通过单子句复合标准矛盾体构造方法生成多个新的标准矛盾体实例。

输入:$\wedge_{i=1}^{m}B_i=(\sim p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_2\vee\sim p_3)\wedge(p_3\vee\sim p_4)\wedge(p_2\vee p_4)$,$\wedge_{j=1}^{n}C_j=p_1\wedge\sim p_1$(其中 p_i 是文字,$i=1,2,3,4$)。

输出:仅给出部分结果。

$SC[1][1]=(p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_2\vee\sim p_3)\wedge(p_3\vee\sim p_4)\wedge(p_2\vee p_4)\wedge\sim p_1$;

$SC[1][3]=(\sim p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_1\vee p_2\vee\sim p_3)\wedge(p_3\vee\sim p_4)\wedge(p_2\vee p_4)\wedge\sim p_1$;

$SC[2][2]=(\sim p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_2\vee\sim p_3)\wedge(p_3\vee\sim p_4)\wedge(p_2\vee p_4)\wedge p_1$。

算法 3 基于多子句复合标准矛盾体

输入:矛盾体 $\wedge_{i=1}^{m}B_i$,$\wedge_{j=1}^{n}C_j$ 。

输出:矛盾体 SC 。

1. 初始化 SC;
2. **FOR** $j=1$ TO $n-1$ **DO**
3. **FOR** $i=1$ TO 2 **DO**
4. **FOR** $b=j$ TO $j+1$ **DO**
5. $C=F(B_i,C_b)$;
6. $D_{ib}\leftarrow C$;
7. **END FOR**
8. **END FOR**
9. $SC[1][j]\leftarrow(\wedge_{i=3}^{m}B_i)\wedge((\wedge_{j=1}^{n}C_j)\backslash(C_j\wedge C_{j+1}))\wedge(\wedge_{i=1}^{2}\wedge_{b=1}^{2}D_{ib})$;
10. **END FOR**
11. **RETURN** SC;

例 2 通过多子句复合标准矛盾体构造方法生成多个新的标准矛盾体实例

输入:$\wedge_{i=1}^{m}B_i=(p_1\vee p_2)\wedge(p_1\vee\sim p_2)\wedge(\sim p_1\vee p_2)\wedge(\sim p_1\vee\sim p_2)$,$\wedge_{j=1}^{n}C_j=(p_1\vee p_2)\wedge(\sim p_1\vee p_2)\wedge(p_2\vee\sim p_3)\wedge(\sim p_3\vee p_4)\wedge(\sim p_2\vee\sim p_4)$(其中 p_i 是文字,$i=1,2,3,4$)。

输出:仅给出部分结果。

$SC[1][1]=(p_1\vee p_2)\wedge(p_2\vee\sim p_3)\wedge(\sim p_3\vee p_4)\wedge(\sim p_2\vee\sim p_4)$;

$SC[1][2]=(p_1\vee p_2)\wedge(\sim p_3\vee p_4)\wedge(\sim p_2\vee\sim p_4)\wedge(\sim p_1\vee p_2)\wedge(\sim p_1\vee\sim p_2)\wedge(p_1\vee p_2\vee\sim p_3)$。

4 结束语

本文给出 2 个或多个矛盾体复合生成新矛盾体的策略,并根据进行复合的子句间是否含有相同的命题变元等情况作了详细的讨论。根据复合策略,以及矛盾体具有多个子句的事实,可知任意 2 个或多个矛盾体之间可以进行多次不同的复合,从而生成多个结构互异的矛盾体,能为构造新的矛盾体提供有效的参考。

参考文献:

[1] Nick. A brief history of artificial intelligence[M]. Beijing: Posts & Telecom Press,2017.(in Chinese)

[2] Beckert B,Hahnle R. Reasoning and verification:State of the art and current trends[J]. IEEE Intelligent System,2014,29(1):20-29.

[3] Witherell P, Krishnamurty S, Grosse I R, et al. Improved knowledge management through first-order logic in engineering design ontologies[J]. Artificial Intelligence for Engineering Design Analysis & Manufacturing,2010,24(2):245-257.

[4] Wang Z H, Yan S Q, Wang H M, et al. An overview of Microsoft deep QA system on Stanford Web Questions benchmark: MSR-TR-2014-121 [R]. Washington: Microsoft Corporation,2014.

[5] Liebig T. Reasoning with OWL—System support and insights[M]. Berlin:Springer,2013.

[6] Maria F,Luc D R,Wolfgang B. Artificial intelligence in a historical perspective[J]. AI Communications,2014,27(1):87-102.

[7] Kaliszyk C, Urban J. MizAR 40 for Mizar 40[J]. Journal of Automated Reasoning,2015,55(3):245-256.

[8] Kaliszyk C, Urban J. Learning-assisted automated reasoning with Flyspeck[J]. Journal of Automated Reasoning, 2014, 53:173-213.

[9] Robinson J A. A machine-oriented logic based on the resolution principle[J]. Journal of the ACM,1965,12(1):23-41.

[10] Prasad G. Six lectures on recent researches in the theory of Fourier series[J]. Bulletin of the American Mathematical Society,1930,36(1):33-33.

[11] Wos L,Robinson G A,Carson D F. Efficiency and completeness of the set of support strategy in theorem proving[J]. Journal of the ACM,1965,12(4):536-541.

[12] Zou Li,Liu Di,Zheng Hong-liang. (α,β)-generalized lock

resolution of intuitionistic fuzzy logic[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(8): 1004-1009. (in Chinese)

[13] Meng Jia. Resolution-based automated reasoning in linguistic 2-tuple[D]. Dalian: Liaoning Normal University, 2018. (in Chinese)

[14] Li Xiao-nan. The study of (α, β)-linear resolution method for intuitionistic fuzzy logic[D]. Dalian: Liaoning Normal University, 2017. (in Chinese)

[15] Xu Y, Liu J, Chen S, et al. Contradiction separation based dynamic multi-clause synergized automated deduction[J]. Information Sciences, 2018, 462: 93-113.

[16] Sutcliffe G. The 10th IJCAR automated theorem proving system competition-CASC-J10[J]. AI Communications, 2021, 34(2): 163-177.

[17] Cao F, Xu Y, Liu J, et al. CSE_E 1.0: An integrated automated theorem prover for first-order logic[J]. Symmetry, 2019, 11(9): 1142-1147.

[18] Cao F, Xu Y, Chen S, et al. A contradiction separation dynamic deduction algorithm based on optimized proof search[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2019, 12(2): 1245-1254.

[19] Cao F, Xu Y, Chen S, et al. A multi-clause dynamic deduction algorithm based on standard contradiction separation rule[J]. Information Sciences, 2021, 566: 281-299.

[20] Zhong J, Xu Y, Cao F. A novel combinational ATP based on contradiction separation for first-order logic[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2020, 13(1): 672-680.

[21] Büning H K. On subclasses of minimal unsatisfiable formulas[J]. Discrete Applied Mathematics, 2000, 107(11A): 83-98.

[22] Tang Lei-ming, Bai Mu-chen, He Xing-xing, et al. Complete contradiction and smallest contradiction based on propositional logic[J]. Computer Science, 2020, 47(11A): 83-85. (in Chinese)

[23] Liu Xu-hua. Automatic reasoning based on the reduced method[M]. Beijing: Science Press, 1994. (in Chinese)

[24] Heule M, Järvialo M, Lonsing F, et al. Clause elimination for SAT and QSAT[J]. The Journal of Artificial Intelligence Research, 2015, 53: 127-168.

附中文参考文献：

[1] 尼克.人工智能简史[M].北京:人民邮电出版社,2017.

[12] 邹丽,刘迪,郑宏亮.直觉模糊逻辑的(α,β)-广义锁归结方法[J].计算机科学与探索,2015,9(8):1004-1009.

[13] 孟佳.基于语言值二元组的归结自动推理方法[D].大连:辽宁师范大学,2018.

[14] 李晓楠.直觉模糊逻辑的(α,β)-线性归结方法研究[D].大连:辽宁师范大学,2017.

[22] 唐雷明,白沐尘,何星星,等.基于命题逻辑的完全标准矛盾体及最小标准矛盾体[J].计算机科学,2020,47(11A):83-85.

[23] 刘叙华.基于归结方法的自动推理[M].北京:科学出版社,1994.

作者简介：

黎兴玉(1997 -),女,四川绵阳人,硕士生,研究方向为矛盾体的复合性质和矛盾体与图的关系。**E-mail**: x.he@home.swjtu.edu.cn

LI Xing-yu, born in 1997, MS candidate, her research interests include properties of compound contradictions and relationship of contradictions & graph.

何星星(1982 -),男,湖南常德人,博士,副教授,CCF会员(48067M),研究方向为基于逻辑的自动推理、深度学习和人工智能。**E-mail**: x.he@home.swjtu.edu.cn

HE Xing-xing, born in 1982, PhD, associate professor, CCF member(48067M), his research interests include automated reasoning based on logic, deep learning, and artificial intelligence.

马雪(1997 -),女,河北石家庄人,硕士生,研究方向为命题逻辑和深度学习。**E-mail**: 1010721611@qq.com

MA Xue, born in 1997, MS candidate, her research interests include propositional logic and deep learning.

李莹芳(1985 -),女,广西桂林人,博士,副教授,研究方向为智能信息处理、智能决策与控制、不确定性信息度量与分析和推理与问题求解。**E-mail**: liyf@swufe.edu.cn

LI Ying-fang, born in 1985, PhD, associate professor, her research interests include intelligent information processing, intelligent decision making & control, measurement & analysis of uncertain information, and reasoning & problem solving.